Ecole Supérieure de Gestion

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR TECHNIQUE PRIVÉ

CONCOURS D'ENTRÉE 1987

CONCOURS FORMULES G

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

DUREE : 3 HEURES COEFFICIENT : 2

MARDI 28 AVRIL 1987 16H à 19H

Les parties I, II et III sont indépendantes.

Toutes les probabilités calculées dans ce problème seront données sour forme de fractions irréductibles.

Les dés considérés sont cubiques et les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère un lot de 10 dés, dont 5 d'entre eux sont pipés et les autres équilibrés. Pour un dé pipé la probabilité d'obtenir 6 lorsqu'on le lance sera prise égale à $\frac{1}{5}$

I- 1°) On effectue des lancers successifs d'un dé équilibré et on désigne par u_i le numero obtenu au ième lancé de ce dé.

Calculer les probabilités des évenements suivants :

a) $u_1 < u_2$

b) $u_1 = u_2$

c) $u_1 \leq u_2$

d) $u_1 > u_2 > u_3$

e) Lors des trois premiers lancés les trois numéros obtenus sont distincts ($u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq u_1$).

2°) On effectue toujours des lancés successifs d'un dé équilibré et on arrête les lancés dès que $u_i \leq u_{i+1}$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancés effectués.

a) Calculer la probabilité de l'évènement X = 2
b) Quelles sont les valeurs possibles de X
c) Calculer la probabilité de l'évènement X > 2
d) Déterminer la fonction de répartition de X
e) Determiner la loi de la probabilite de X et calculer l'espérance de X.

3°) On effectue cette fois ci des lancés successifs d'un dé équilibré mais on arrête les lancés dès que l'on a obtenu pour la première fois deux fois le même numéro.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de lancés effectués.

EXEMPLES :

Si $u_1 = 2$ $u_2 = 3$ $u_3 = 4$ $u_4 = 3$

On arrête les lancés et Y prend la valeur 4

Si $u_1 = 1$ $u_2 = 3$ $u_3 = 5$ $u_4 = 6$ $u_5 = 2$ $u_6 = 1$

On arrête les lancés et Y prend la valeur 6
Déterminer la loi de Y et calculer l'espérance de Y.

II- 1°) on choisit au hasard un dé du lot des dix dés, on le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité de l'évenement "le dé choisi est pipé"

2°) on choisit au hasard deux dés du lot des dix dés, on les lance et on obtient 6 et 6. Quelle est la probabilité de l'évènement "les deux dés choisis sont pipés".

III- On appelle A l'évènement "obtenir au moins deux fois six lorsqu'on lance simultanément cinq dés du lot".

1°) Calculer les probabilités p_0 , p_1 et p_3 de l'évènement A dans les cas suivants :

- On a lancé les cinq dés pipés
- On a lancé les cinq dés équilibrés
- On a lancé deux dés équilibrés et trois dés pipés

2°)on lance maintenant n fois de suite cinq dés dont deux d'entre eux sont équilibrés et les trois autres pipés.
Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évenement A se réalise lors des n lancés de ces cinq dés.
Déterminer la loi de Z et calculer l'espérance et la variance de Z

3°) k étant un entier naturel vérifiant $1 \leq k \leq n$
Si Z = k, on lance alors k fois de suite les cinq dés équilibrés.
Soit U la variable aléatoire égale au nombre de fois ou l'évenement A se réalise lors des k lancés de ces cinq dés équilibrés.

a) Calculer la probabilité de l'évenement U = i sachant Z = k que l'on note :

$$p\left[U = i \,/\, Z = k\right]$$

b) on pose :

$$p\left[U = 0 \,/\, Z = 0\right] = 1$$

déterminer la loi de U et calculer l'espérance et la variance de U.